10. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 352 с.

CONSTRUCTION OF GENERAL SOLUTION OF SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A VARIABLE CHANGING SIGN COEFFICIENT

N.V. Martemyanova

While solving inverse problems for a degenerate mixed type equation we obtain a inhomogeneous ordinary equation with a variable changing sign coefficient. We construct general solution of this equation and prove some its properties.

Keywords: inhomogeneous ordinary differential equation with a variable changing sign coefficient, general solution, particular solution.

УДК 517.53

ОБ НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

В.Р. Мисюк[1]

1 *misiuk@grsu.by*; Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно, Беларусь

В статье рассматривается вопрос о наилучшем приближении степенной функции в пространстве Бергмана.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, прямые теоремы, пространство Бергмана.

Пусть S – спрямляемая кривая Жордана (простая или замкнутая) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для $0 < p \le \infty$ через $L_p(S)$ обозначим пространство Лебега комплекснозначных на S относительно линейной меры Лебега с обычной квазинормой $\|L_p(S)\|$ (нормой при $1 \le p \le \infty$). Именно, $f \in L_p(S)$, если

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(S)} := \left(\int_D \left| f(\xi) \right|^p |d\xi| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{при} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(S)} := \sup_{\xi \in S} \left| f(\xi) \right| < \infty \qquad \text{при} \quad p = \infty.$$

Согласно определению [1-3], функция f, аналитическая в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, принадлежит пространству Харди H_p, $0 < p \le \infty$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{r \in (0,1)} \|f\|_{L_p(S_r)},$$

где S_r – окружность $|\xi| = r$. Как известно, почти для всех $\xi \in D$ функция $f(z)$, $z \in D$ имеет некасательные предельные значения. Таким образом, функция $f \in H_p$ определена не только в D, но и почти всюду на ∂D – границе D. При этом оказывается, что $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\partial D)}$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n. Для функции $f \in H_p$ введём

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n \in \mathscr{P}_n} \|f - P_n\|_{H_p}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

— наилучшее приближение f посредством множества $\mathscr{P}_n$.

В теории полиномиальных приближений хорошо известна следующая импликация, так называемая теорема типа Джексона:

$$f^{(s)} \in H_p \implies E_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{H_p} \qquad \text{при} \qquad n \geqslant s, \tag{1}$$

где $c > 0$ и зависит лишь от p и s, а $f^{(s)}$ – s-ая производная ($s \in \mathbb{N}$) функции f.

В случае $1 \leq p \leq \infty$ соотношение (1) доказывается аналогично теореме Джексона для периодических функций [5]. Далее, Э.А. Стороженко [4] приводит аналог первой теоремы Джексона для пространств H_p при $0 < p < 1$ для модулей непрерывности первого порядка и проводит обобщение на случай модулей гладкости произвольных порядков [6].

Для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ введем в рассмотрение функцию $f_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$, где главная ветвь берется в области $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$. Из импликации (1) немедленно получаем, что при $n \to \infty$ имеет место слабая эквивалентность

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha - \frac{1}{p}}, \qquad \alpha \in \left(-\frac{1}{p}, \infty\right) \setminus \mathbb{Z}. \tag{2}$$

На случай плоской меры Лебега достаточно глубокие исследования в данном направлении не проводились. Однако можно отметить, что в 1961 г. С.Я. Альпер [7] изучал вопросы, связанные с приближения аналитических функций в среднем, в частности, им был получен аналог неравенства (1) при условиях $s = 0$, $p \geq 1$. Обобщения (1) на другие значения параметра на случай плоской меры были получены автором [8].

Пусть m_2 – плоская мера Лебега. Через $A_p = A_p(D)$, $0 < p \leqslant \infty$, обозначим пространство Бегмана[1] аналитических функций f в D, наделённых конечной квазинормой $\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$) относительно плоской меры Лебега. Именно,

$$\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)} := \left(\int\limits_D \left| f(\xi) \right|^p dm_2(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{при} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{A_\infty} = \|f\|_{L_\infty(D)} := \sup_{\xi \in D} \left| f(\xi) \right| < \infty \qquad \text{при} \quad p = \infty.$$

Ясно, что пространства H_∞ и A_∞ совпадают. Поэтому далее мы рассматриваем случай $0 < p < \infty$. Для $f \in A_p(D)$ введём

$$E_n(f)_{A_p} = \inf_{P_n \in \mathscr{P}_n} \|f - P_n\|_{A_p(D)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

1 Иногда это пространство называют *пространством М.М. Држбашяна*.

— наилучшее приближение функции f в пространстве A_p посредством множества $\mathscr{P}_n$.

Следующий результат [8] можно рассматривать как соответствующую теорему типа Джексона для пространства A_p: *если* $s \in \mathbb{N}$ *и* $f^{(s)} \in A_p(D)$, $0 < p < \infty$, *то*

$$E_n(f)_{A_p} \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{A_p}, \qquad n = s, s+1, \dots, \tag{3}$$

где $c > 0$ *и не зависит от* f *и* n.

Исходя из соотношения (3), нами показано, что слабая эквивалентность (2) при $n \to \infty$ примет соответственно вид

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha-\frac{2}{p}}, \qquad \alpha \in \left(-\frac{2}{p}, \infty\right) \setminus \mathbb{Z}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований "Конвергенция - 2020".

Литература

1. Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций*. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 431 с.

2. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p*. – М.: Мир, 1984. – 368 с.

3. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции*. – М.: Мир, 1984.. – 469 с.

4. Стороженко Э. А. *Приближение функций класса H_p, $0 < p \leq 1$* // Мат. сборник. – 1978. – Т. 105(147). – № 4. – С. 600–621.

5. Тиман А. Ф. *Теория приближений функций действительного переменного*. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 624 с.

6. Стороженко Э. А. *О приближении функций класса H_p ($0 < p \leq 1$)* // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1977. – Т. 88. – № 4. – С. 45–48.

7. Альпер С. Я. *О приближении аналитических функций в среднем по области* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 136. – № 2. – С. 265–268.

8. Мисюк В. Р. *Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана* // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер.2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. – 2006. – № 1. – С. 58–62.

ON THE BEST APPROXIMATION OF A POWER FUNCTION IN THE BERGMAN SPACE

V.R. Misiuk

In this paper we consider the best approximation of a power function in the Bergman space.

Keywords: best polynomial approximation, direct theorems, Bergman space.